

# Cuadrados fractáureos

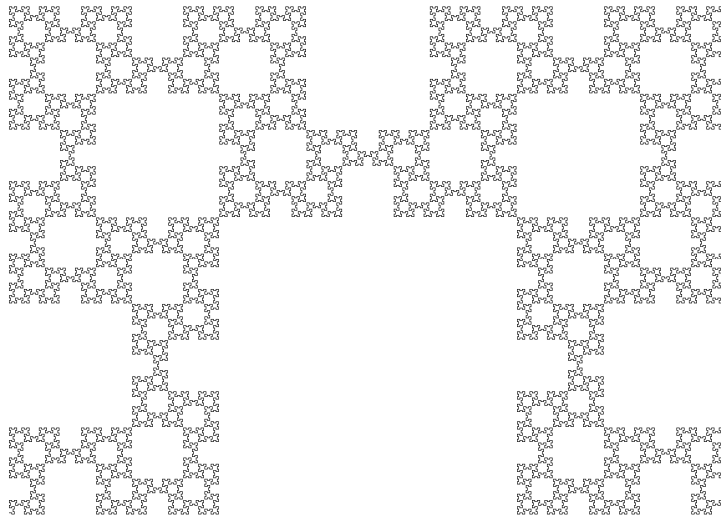
J. Romañach y M. Toboso – Julio 2016

## 1 Introducción

El número de fractales conocidos crece constantemente, y en este momento se aproxima a los 150 si consideramos tanto los deterministas como los aleatorios. Algunos de estos fractales tienen que ver con la proporción áurea, o número  $\varphi$  (phi)<sup>1</sup>.

En este texto abordamos el crecimiento fractal de una superficie cuadrada cuando el factor de crecimiento en cada iteración es  $1/\varphi$ .

Se trata de un fractal parecido al de la palabra de Fibonacci<sup>2</sup>:



**Fig. 1.1 – Fractal Palabra de Fibonacci**

## 2 Crecimiento fractáureo

La palabra “fractáureo” fue usada por primera vez en diciembre de 2015 en el capítulo 22 de la serie de videos: “Algo pasa con phi - Fractales caleidoscópicos y la proporción áurea”<sup>3</sup>. En ese video se aplicaba la proporción áurea a los poliedros resultantes del uso del concepto de Sistemas Fractales Iterativos Caleidoscópicos.

En dos dimensiones significa utilizar métodos iterativos fractales para hacer crecer un polígono regular de lado  $l$  usando la proporción  $1/\varphi$ .

Antes de aplicar esta idea al cuadrado, podemos ver un ejemplo aplicado al triángulo equilátero.

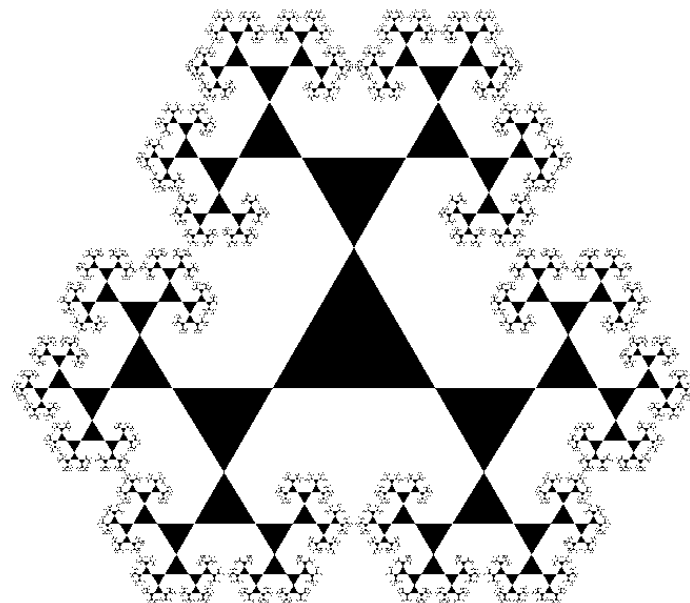
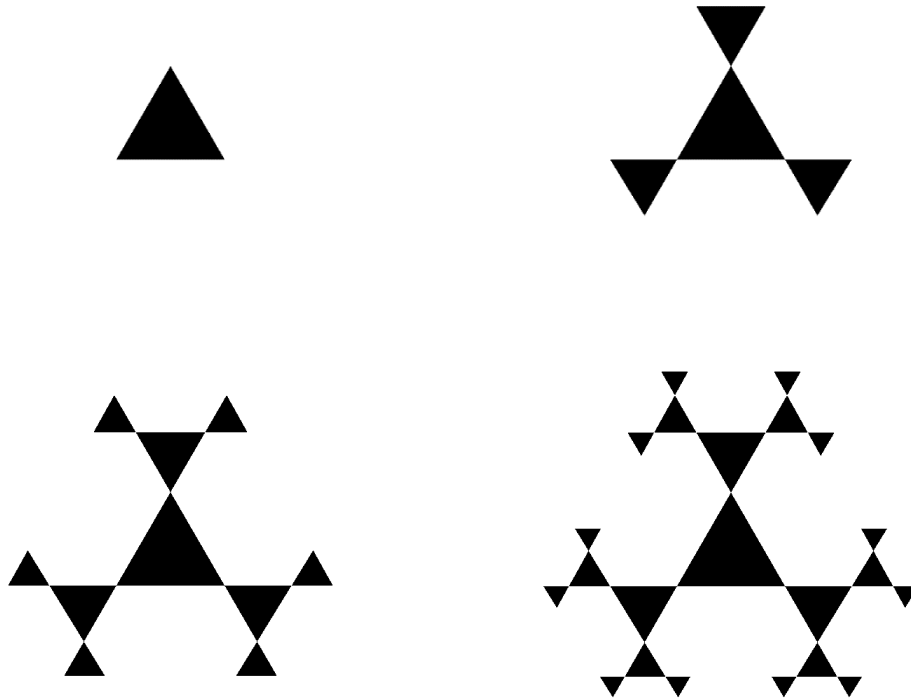
---

<sup>1</sup> Para designar la letra griega phi usaremos los símbolos  $\varphi$  y  $\Phi$  indistintamente

<sup>2</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_fractals\\_by\\_Hausdorff\\_dimension](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension)

<sup>3</sup> <https://www.youtube.com/watch?v=DAs4ReRkZDU>

Para ello tomamos uno inicial de lado 1, y hacemos 3 que disminuyen su lado siguiendo la proporción  $1/\varphi$ . Cada copia se coloca en uno de los vértices. En cada paso aplicamos el mismo método a todos los triángulos.



**Fig. 2.1 – Cuatro primeras interacciones e iteración 15 de la secuencia fractáurea del triángulo equilátero.**

### 3 Cuadrados fractáureos

En el caso del cuadrado, hacemos una copia del cuadrado, la multiplicamos por  $1/\Phi$ , y colocamos una de esas copias en cada vértice. Y repetimos iterativamente el proceso con cada una de las nuevas copias; y otra vez con las nuevas, etc.

Se pueden aplicar dos métodos parecidos, que hemos bautizado como método "limpio" o "Livio" y "directo" o "Romañach". Ambos, aunque sutilmente distintos al realizar las iteraciones, comparten las dimensiones del cuadrado exterior límite.



**Fig.3.1 Cuadrados fractáureos de dos tipos. A la izquierda el método "limpio" o "Livio"; a la derecha el método "directo" o "Romañach"**

#### 3.1 CUADRADO EXTERIOR LÍMITE

El lado del cuadrado crece por ambos lados siguiendo la serie:  $1 + \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi^3} + \dots$

Cuyo límite podemos calcular, teniendo en cuenta que el lado crece hacia ambos lados:

$$L = 1 + 2 * \left( \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi^3} + \dots \right) = 1 + 2 * \left( \frac{1/\Phi}{1 - 1/\Phi} \right) = 1 + \left( \frac{2}{\Phi - 1} \right) = 1 + \left( \frac{2}{1/\Phi} \right) = 1 + 2\Phi = 4,236067977$$

$$L = 1 + 2\Phi$$

Su perímetro P será entonces:

$$P = 4 * L = 4 * (1 + 2\Phi) = 4 + 8\Phi = 16,9442719$$

$$P = 4 + 8\Phi$$

Y su superficie

$$S = (1 + 2\Phi) * (1 + 2\Phi) = 1 + 4\Phi + 4\Phi^2 = 1 + 4 * (\Phi + \Phi^2) = 1 + 4 * (1 + 2\Phi) = 5 + 8\Phi =$$

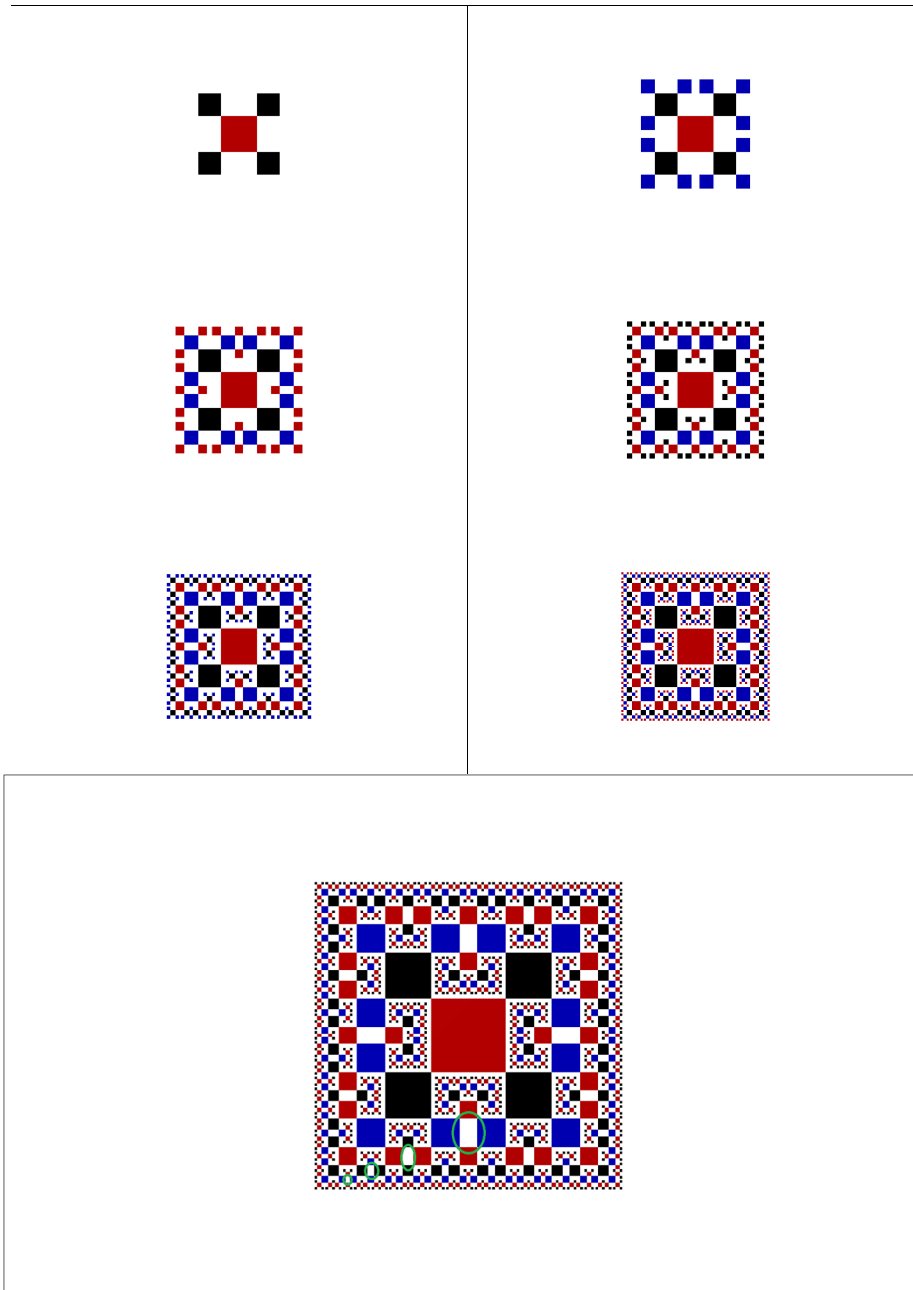
$$S = 5 + 8\Phi$$

Podemos intentar calcular dos cosas: el perímetro de la figura interior y la superficie ocupada en cada paso, y luego compararlas con las del cuadrado exterior.

Como se ha mencionado anteriormente, aplicaremos dos métodos iterativos diferentes para rellenar el interior del cuadrado exterior utilizando métodos fractálicos: el denominado el método "limpio" o de "Livio"; y el método "directo", o de "Romañach", los nombres se han escogido teniendo en cuenta la estructura del algoritmo que genera las figuras y el nombre de sus autores. Ambos se analizan a continuación, determinando las fórmulas para calcular el número de cuadrados que generan, su perímetro y su superficie.

## 4 Método de “Livio” o “limpio”

Este método es el utilizado por Mario Livio en la página 122 de su libro “La proporción áurea”. En el proceso iterativo fractal, deja definitivamente atrás rectángulos áureos sin rellenar. Esos huecos que quedan sin rellenar se pueden ver en la siguiente figura.



**Figura 4.1. – Método “Livio” o “limpio”. Seis primeros pasos de crecimiento fractáureo del cuadrado negro interior de lado 1 y séptimo paso con huecos marcados.**

### 4.1 NÚMERO DE CUADRADOS NUEVOS EN CADA PASO

En primer lugar hay que aclarar que se empieza el método considerando que el paso 1 es el que tiene únicamente el cuadrado inicial o semilla. En ese primer paso no se aporta ningún cuadrado nuevo.

El número de cuadrados nuevos ( $C_n$ ) es el número de cuadrados que se añaden al cuadrado inicial en el paso  $n$ . En esta serie sigue la secuencia:

$$C_n \rightarrow 0, 4, 12, 28, 60, 132, 300, 692, \dots$$

Y su término general es, a partir del paso 6:

$$C_n = 3C_{n-1} - 2C_{n-2} + 2C_{n-4}$$

El número total de cuadrados que aporta cada paso  $n$  se puede ver en la tabla siguiente, en sus 30 primeros pasos:

Paso	$C_n$ - Cuadrados nuevos en cada paso $n$
1	1
2	4
3	12
4	28
5	60
6	132
7	300
8	692
9	1.596
10	3.668
11	8.412
12	19.284
13	44.220
14	101.428
15	232.668
16	533.716
17	1.224.252
18	2.808.180
19	6.441.372
20	14.775.188
21	33.891.324
22	77.739.956
23	178.319.964
24	409.030.356
25	938.233.788
26	2.152.120.564
27	4.936.534.044
28	11.323.421.716
29	25.973.664.636
30	59.578.391.604

**Tabla 4.1. Número de cuadrados que se añaden al inicial en cada paso  $n$ . 30 primeros pasos**

## 4.2 PERÍMETRO DEL FRACTAL

Cada grupo de cuadrados nuevos aporta sus cuatro lados de perímetro en cada paso. Vemos cómo van sumando más perímetro a la figura y finalmente se puede observar la relación que hay entre el perímetro acumulado de cada paso y el perímetro del cuadrado exterior máximo ( $P = 4+8\varphi = 16,94427191$ ).

Además, también hay que tener en cuenta en la suma el perímetro cuadrado inicial, ya que se trata de comparar el perímetro la superficie con el cuadrado exterior máximo.

En la siguiente tabla podemos ver el crecimiento del perímetro en cada paso, en los 30 primeros pasos.

Paso	Cuadrados	Lado	Perímetro cuadrado paso	Perímetro acumulado	Razón respecto a cuadrado máximo
1	1	1	4,00	4,00	0,24
2	4	0,61803399	9,89	13,89	0,82
3	12	0,38196601	18,33	32,22	1,90
4	28	0,23606798	26,44	58,66	3,46
5	60	0,14589803	35,02	93,68	5,53
6	132	0,09016994	47,61	141,29	8,34
7	300	0,05572809	66,87	208,16	12,29
8	692	0,03444185	95,34	303,50	17,91
9	1.596	0,02128624	135,89	439,39	25,93
10	3.668	0,01315562	193,02	632,41	37,32
11	8.412	0,00813062	273,58	905,99	53,47
12	19.284	0,005025	387,61	1.293,59	76,34
13	44.220	0,00310562	549,32	1.842,92	108,76
14	101.428	0,00191938	778,71	2.621,63	154,72
15	232.668	0,00118624	1.104,00	3.725,63	219,88
16	533.716	0,00073314	1.565,15	5.290,78	312,25
17	1.224.252	0,0004531	2.218,85	7.509,63	443,20
18	2.808.180	0,00028003	3.145,54	10.655,17	628,84
19	6.441.372	0,00017307	4.459,24	15.114,41	892,01
20	14.775.188	0,00010696	6.321,61	21.436,03	1.265,09
21	33.891.324	6,6107E-05	8.961,81	30.397,84	1.793,99
22	77.739.956	4,0856E-05	12.704,68	43.102,52	2.543,78
23	178.319.964	2,5251E-05	18.010,75	61.113,27	3.606,72
24	409.030.356	1,5606E-05	25.532,88	86.646,15	5.113,60
25	938.233.788	9,6449E-06	36.196,59	122.842,74	7.249,81
26	2.152.120.564	5,9609E-06	51.313,97	174.156,71	10.278,21
27	4.936.534.044	3,684E-06	72.745,06	246.901,77	14.571,40
28	11.323.421.716	2,2768E-06	103.126,76	350.028,53	20.657,63
29	25.973.664.636	1,4072E-06	146.197,28	496.225,81	29.285,76
30	59.578.391.604	8,6968E-07	207.256,04	703.481,85	41.517,38

**Tabla 4.2 – Perímetro aportado en cada paso. 30 primeras pasos**

Como se puede observar, el perímetro de la figura crece siempre, y en el paso 30 es 41.517 veces el perímetro del cuadrado exterior máximo.

### 4.3 SUPERFICIE DEL FRACTAL

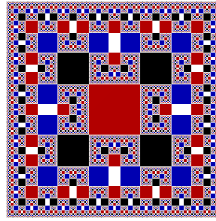


Figura 4.2. – Paso 10 del método “Livio” o “limpio”.

Por su parte, tal como se puede apreciar en la figura precedente, la superficie del fractal crece también pero no supera la del cuadrado exterior límite o cuadrado máximo.

Paso	Cuadrados	Superficie de 1 cuadrado	Superficie del paso	Superficie Acumulada	Razón respecto a cuadrado exterior
1	1	1	1,00	1,00	0,06
2	4	0,38196601	1,53	2,53	0,14
3	12	0,14589803	1,75	4,28	0,24
4	28	0,05572809	1,56	5,84	0,33
5	60	0,02128624	1,28	7,12	0,40
6	132	0,00813062	1,07	8,19	0,46
7	300	0,00310562	0,93	9,12	0,51
8	692	0,00118624	0,82	9,94	0,55
9	1.596	0,0004531	0,72	10,67	0,59
10	3.668	0,00017307	0,63	11,30	0,63
11	8.412	6,6107E-05	0,56	11,86	0,66
12	19.284	2,5251E-05	0,49	12,34	0,69
13	44.220	9,6449E-06	0,43	12,77	0,71
14	101.428	3,684E-06	0,37	13,14	0,73
15	232.668	1,4072E-06	0,33	13,47	0,75
16	533.716	5,3749E-07	0,29	13,76	0,77
17	1.224.252	2,053E-07	0,25	14,01	0,78
18	2.808.180	7,8419E-08	0,22	14,23	0,79
19	6.441.372	2,9953E-08	0,19	14,42	0,80
20	14.775.188	1,1441E-08	0,17	14,59	0,81
21	33.891.324	4,3701E-09	0,15	14,74	0,82
22	77.739.956	1,6692E-09	0,13	14,87	0,83
23	178.319.964	6,3759E-10	0,11	14,98	0,83
24	409.030.356	2,4354E-10	0,10	15,08	0,84
25	938.233.788	9,3024E-11	0,09	15,17	0,85
26	2.152.120.564	3,5532E-11	0,08	15,25	0,85
27	4.936.534.044	1,3572E-11	0,07	15,31	0,85
28	11.323.421.716	5,184E-12	0,06	15,37	0,86
29	25.973.664.636	1,9801E-12	0,05	15,42	0,86
30	59.578.391.604	7,5634E-13	0,05	15,47	0,86

Tabla 4.3 – Superficie aportada en cada paso. 30 primeras pasos

Como vemos, en el primer paso, la figura ocupa el 6% de la superficie total del cuadrado exterior, y en el paso 30 la figura ocupa el 86% por ciento.

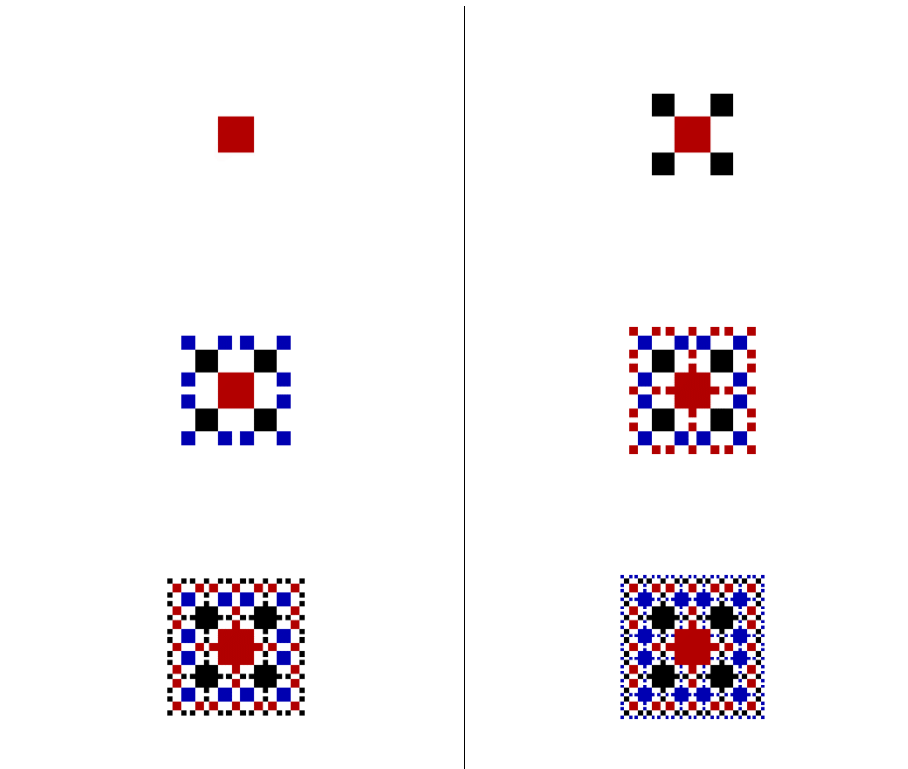
Dada la manera de construir la figura, que deja siempre notables rectángulos áureos sin rellenar (huecos), la superficie total del fractal será siempre menor que la del cuadrado exterior límite.



## 5 Método “Romañach” o “directo”

Este método, presentado por primera vez en este texto, es el resultado directo de aplicar algoritmos de programación recursiva sin filtros a la hora de pintar la serie, y contar sólo los elementos que ocupan nueva superficie.

Se parece al método anterior, pero en este, a partir del paso 4 empiezan a aparecer 4 “bultos” más (cuadrados del tamaño correspondiente al nivel) adosados a los cuadrados que han sido dibujados tres pasos antes; los “bultos” se han pintado del mismo color que los cuadrados a los que se adosan.



**Fig. 5.1. – Método “directo” o “Romañach”. Seis primeros pasos de crecimiento fractáureo del cuadrado interior de lado 1.**

### 5.1 NÚMERO DE CUADRADOS NUEVOS EN CADA PASO

Como en el método anterior, hay que aclarar que empezamos el método considerando que el paso 1 es el que tiene únicamente el cuadrado inicial o semilla. En ese primer paso no se aporta ningún cuadrado nuevo.

El número de cuadrados nuevos ( $C_n$ ) de esta serie sigue la secuencia:

$$C_n \rightarrow 0, 4, 12, 32, 76, 180, 416, 948, \dots$$

Y su término general es, a partir del paso 7:

$$C_n = 3C_{n-1} - C_{n-2} - C_{n-3} - C_{n-4} - C_{n-5}$$

El número total de cuadrados que aporta cada paso n se puede ver en la tabla siguiente, en sus 30 primeros pasos:

Paso	$C_n$ - Cuadrados nuevos en cada paso n
1	1
2	4
3	12
4	32
5	76
6	180
	416
8	948
9	2.140
10	4.800
11	10.716
12	23.844
13	52.928
14	117.284
15	259.564
16	573.920
17	1.268.140
18	2.800.724
19	6.183.264
20	13.647.444
21	30.116.284
22	66.449.280
23	146.600.124
24	323.404.100
25	713.399.168
26	1.573.627.716
27	3.471.030.476
28	7.656.060.320
29	16.886.719.500
30	37.246.040.820

**Tabla 5.1. Número de cuadrados que se añaden al inicial en cada paso n. 30 primeros pasos**

## 5.2 PERÍMETRO DEL FRACTAL

Para sumar el perímetro del fractal tenemos que distinguir, a partir del paso 4, los cuadrados nuevos que aportan 4 lados (los exteriores y la mitad de los interiores) y los que aportan 3 lados (la otra mitad de los interiores), por ser adyacentes a uno mayor.

Vemos cómo van sumando más perímetro a la figura y finalmente se puede observar la relación que hay entre el perímetro acumulado de cada paso y el perímetro del cuadrado exterior máximo ( $P = 4+8\varphi = 16,94427191$ ).

También en este caso hay que tener en cuenta el cuadrado inicial, ya que se trata de comparar el perímetro la superficie con el cuadrado exterior máximo.

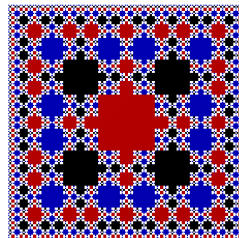
En la siguiente tabla podemos ver el crecimiento del perímetro en cada paso, en los 30 primeros pasos.

Paso	Lado	Perímetro cuadrado paso	Perímetro acumulado	Razón respecto a cuadrado máximo
1	1,00000000	4,00	4,00	0,24
2	0,61803399	9,89	13,89	0,82
3	0,38196601	17,76	31,65	1,87
4	0,23606798	29,27	60,92	3,60
5	0,14589803	42,97	103,89	6,13
6	0,09016994	62,89	166,78	9,84
7	0,05572809	89,83	256,62	15,14
8	0,03444185	126,52	383,14	22,61
9	0,02128624	176,52	559,65	33,03
10	0,01315562	244,69	804,35	47,47
11	0,00813062	337,62	1.141,97	67,40
12	0,00502500	464,29	1.606,26	94,80
13	0,00310562	636,95	2.243,21	132,39
14	0,00191938	872,31	3.115,52	183,87
15	0,00118624	1.193,13	4.308,65	254,28
16	0,00073314	1.630,45	5.939,10	350,51
17	0,00045310	2.226,57	8.165,68	481,91
18	0,00028003	3.039,15	11.204,83	661,28
19	0,00017307	4.146,79	15.351,62	906,01
20	0,00010696	5.656,63	21.008,25	1.239,84
21	0,00006611	7.714,72	28.722,97	1.695,14
22	0,00004086	10.520,14	39.243,11	2.316,01
23	0,00002525	14.344,25	53.587,36	3.162,57
24	0,00001561	19.556,97	73.144,33	4.316,76
25	0,00000964	26.662,50	99.806,83	5.890,30
26	0,00000596	36.348,18	136.155,02	8.035,46
27	0,00000368	49.550,89	185.705,91	10.959,80
28	0,00000228	67.547,73	253.253,64	14.946,27
29	0,00000141	92.079,52	345.333,17	20.380,53
30	0,00000087	125.519,23	470.852,39	27.788,29

**Tabla 5.2. – Perímetro aportado en cada paso. 30 primeras pasos**

Como se puede observar, el perímetro de la figura crece siempre, y en el paso 30 es 27.778 veces el perímetro del cuadrado exterior máximo.

### 5.3 SUPERFICIE DEL FRACTAL



**Figura 5.2. – Paso 10 del método “Romañach” o “directo”.**

Por su parte, tal como se puede apreciar en la figura precedente, la superficie crece también pero no puede superar la del cuadrado exterior máximo.

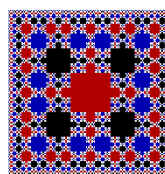
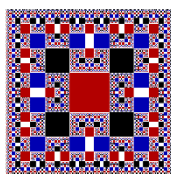
Paso	Cuadrados	Superficie de 1 cuadrado	Superficie del paso	Superficie Acumulada	Razón respecto a cuadrado exterior
1	1	1	1,00	1,00	0,06
2	4	0,381966011	1,53	2,53	0,14
3	12	0,145898034	1,75	4,28	0,24
4	32	0,05572809	1,78	6,06	0,34
5	76	0,021286236	1,62	7,68	0,43
6	180	0,008130619	1,46	9,14	0,51
7	416	0,00310562	1,29	10,44	0,58
8	948	0,001186241	1,12	11,56	0,64
9	2.140	0,000453104	0,97	12,53	0,70
10	4.800	0,00017307	0,83	13,36	0,74
11	10.716	6,6107E-05	0,71	14,07	0,78
12	23.844	2,52506E-05	0,60	14,67	0,82
13	52.928	9,64488E-06	0,51	15,18	0,85
14	117.284	3,68401E-06	0,43	15,61	0,87
15	259.564	1,40717E-06	0,37	15,98	0,89
16	573.920	5,3749E-07	0,31	16,29	0,91
17	1.268.140	2,05303E-07	0,26	16,55	0,92
18	2.800.724	7,84188E-08	0,22	16,77	0,93
19	6.183.264	2,99533E-08	0,19	16,95	0,94
20	13.647.444	1,14411E-08	0,16	17,11	0,95
21	30.116.284	4,37013E-09	0,13	17,24	0,96
22	66.449.280	1,66924E-09	0,11	17,35	0,97
23	146.600.124	6,37593E-10	0,09	17,44	0,97
24	323.404.100	2,43539E-10	0,08	17,52	0,98
25	713.399.168	9,30236E-11	0,07	17,59	0,98
26	1.573.627.716	3,55319E-11	0,06	17,65	0,98
27	3.471.030.476	1,3572E-11	0,05	17,69	0,99
28	7.656.060.320	5,18403E-12	0,04	17,73	0,99
29	16.886.719.500	1,98012E-12	0,03	17,77	0,99
30	37.246.040.820	7,5634E-13	0,03	17,79	0,99

**Tabla 5.3 – Superficie aportada en cada paso. 30 primeros pasos**

Como vemos, en el primer paso, la figura ocupa el 6% de la superficie total del cuadrado exterior, y en el paso 30 la figura ocupa el 99%. A diferencia del método “limpio”, en este método, en el infinito la ocupación de la superficie del cuadrado será total, ya que no quedan huecos que no pueden ser rellenados.

## 6 Comparación entre los dos métodos

Veamos ahora una comparación entre los diferentes aspectos de los dos métodos.



**Fig.6.1 A la izquierda el método “limpio” o “Livio”; a la derecha el método “directo” o “Romañach”**

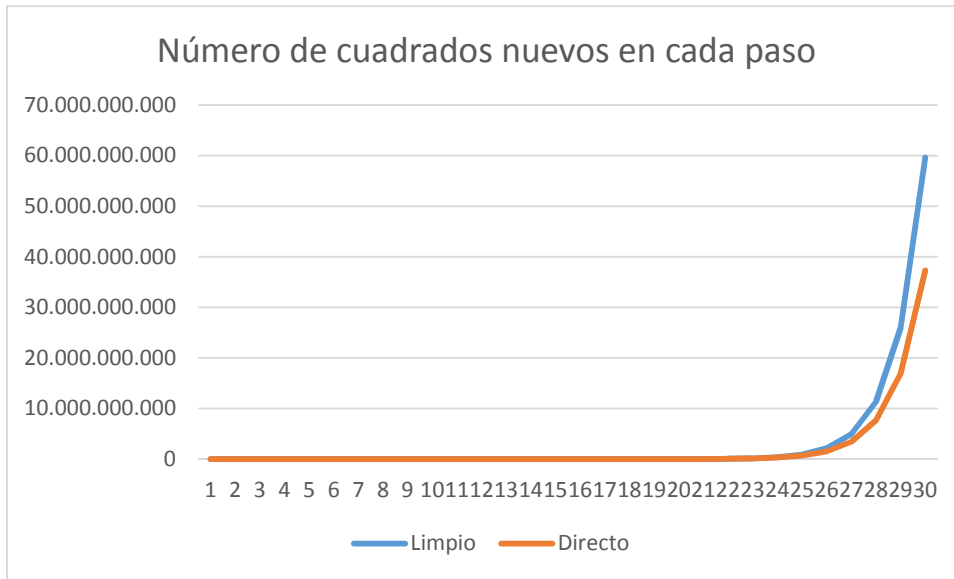
### **6.1 NÚMERO DE CUADRADOS NUEVOS EN CADA PASO**

A continuación comparamos el número de cuadrados nuevos que se añaden en cada paso en cada uno de los métodos

<b>Paso</b>	<b>Limpio</b>	<b>Directo</b>
1	1	1
2	4	4
3	12	12
4	28	32
5	60	76
6	132	180
7	300	416
8	692	948
9	1.596	2.140
10	3.668	4.800
11	8.412	10.716
12	19.284	23.844
13	44.220	52.928
14	101.428	117.284
15	232.668	259.564
16	533.716	573.920
17	1.224.252	1.268.140
<b>18</b>	<b>2.808.180</b>	<b>2.800.724</b>
19	6.441.372	6.183.264
20	14.775.188	13.647.444
21	33.891.324	30.116.284
22	77.739.956	66.449.280
23	178.319.964	146.600.124
24	409.030.356	323.404.100
25	938.233.788	713.399.168
26	2.152.120.564	1.573.627.716
27	4.936.534.044	3.471.030.476
28	11.323.421.716	7.656.060.320
29	25.973.664.636	16.886.719.500
30	59.578.391.604	37.246.040.820

**Tabla 6.1 – Comparativa entre ambos métodos. Número de cuadrados nuevos de cada paso. 30 primeros pasos.**

Como se puede comprobar, en ambos casos el número de cuadrados nuevos crece indefinidamente, pero en los 18 primeros pasos el método “directo” suma más cuadrados nuevos. A partir de ese paso, es el método “limpio” el que aporta más cuadrados nuevos.



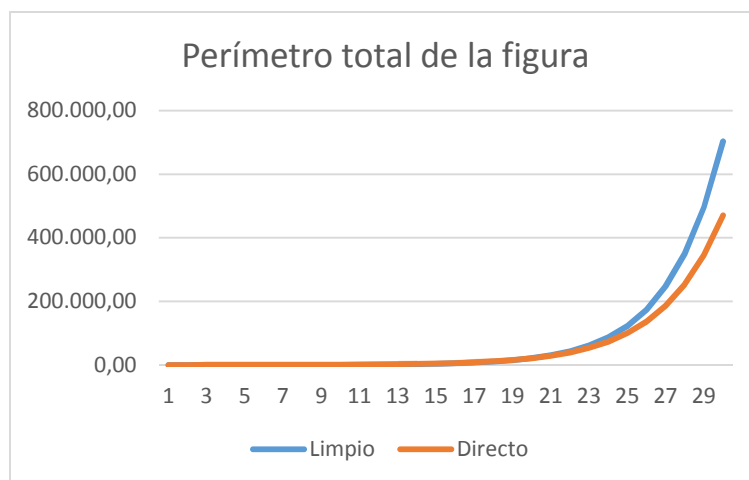
**Gráfico 6.1. – Número de cuadrados nuevos en cada paso. Comparación del crecimiento entre ambos métodos**

## 6.2 PERÍMETRO DEL FRACTAL

Paso	Limpio	Directo	Diferencia
1	4	4	0
2	13,89	13,89	0
3	32,22	31,65	0,57
4	58,66	60,92	-2,26
5	93,68	103,89	-10,21
6	141,29	166,78	-25,50
7	208,16	256,62	-48,46
8	303,50	383,14	-79,64
9	439,39	559,65	-120,27
10	632,41	804,35	-171,94
11	905,99	1.141,97	-235,98
12	1.293,59	1.606,26	-312,66
13	1.842,92	2.243,21	-400,29
14	2.621,63	3.115,52	-493,89
15	3.725,63	4.308,65	-583,02
16	5.290,78	5.939,10	-648,32
17	7.509,63	8.165,68	-656,04
18	10.655,17	11.204,83	-549,65
19	15.114,41	15.351,62	-237,20
<b>20</b>	<b>21.436,03</b>	<b>21.008,25</b>	<b>427,78</b>
21	30.397,84	28.722,97	1.674,87
22	43.102,52	39.243,11	3.859,41
23	61.113,27	53.587,36	7.525,91
24	86.646,15	73.144,33	13.501,82
25	122.842,74	99.806,83	23.035,91
26	174.156,71	136.155,02	38.001,69
27	246.901,77	185.705,91	61.195,86
28	350.028,53	253.253,64	96.774,89
29	496.225,81	345.333,17	150.892,64
30	703.481,85	470.852,39	232.629,46

**Tabla 6.2 – Comparativa entre ambos métodos el perímetro total de cada paso. 30 primeros pasos**

Como se puede comprobar, en ambos casos el perímetro crece indefinidamente, pero el método directo suma más perímetro al principio, en los 19 primeros pasos. A partir de ese paso, es el método limpio el que aporta más perímetro; es este último método el que aporta más perímetro cuando el número de pasos tiende a infinito.



**Gráfico 6.2 – Perímetro total. Comparación del crecimiento entre ambos métodos**

### 6.3 SUPERFICIE DEL FRACTAL

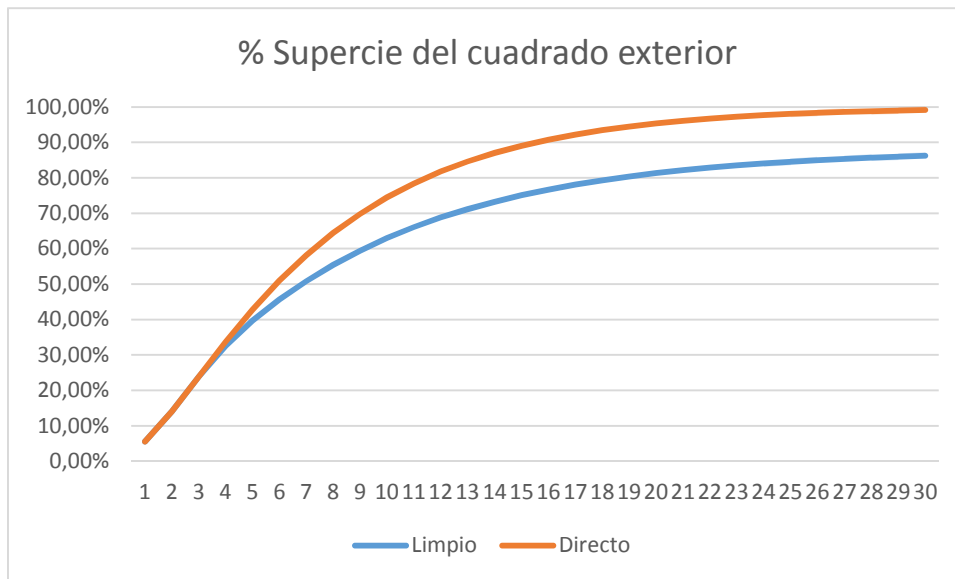
A continuación comparamos el porcentaje de superficie del cuadrado límite exterior que se ocupa en cada paso en cada uno de los métodos,

Paso	Limpio	Directo
1	5,573%	5,573%
2	14,087%	14,087%
3	23,844%	23,844%
4	32,540%	33,782%
5	39,657%	42,797%
6	45,638%	50,953%
7	50,830%	58,153%
8	55,405%	64,420%
9	59,435%	69,824%
10	62,973%	74,453%
11	66,072%	78,401%
12	68,785%	81,756%
13	71,162%	84,601%
14	73,244%	87,009%
15	75,069%	89,044%
16	76,668%	90,763%
17	78,068%	92,214%
18	79,295%	93,438%
19	80,371%	94,470%
20	81,313%	95,341%
21	82,138%	96,074%
22	82,861%	96,692%
23	83,495%	97,213%
24	84,050%	97,652%
25	84,536%	98,022%
26	84,963%	98,333%
27	85,336%	98,596%
28	85,663%	98,817%
29	85,950%	99,003%
30	86,201%	99,160%

**Tabla 6.3 – Comparativa entre ambos métodos. Porcentaje de superficie del cuadrado límite ocupado en cada paso. 30 primeros pasos.**

Como se puede comprobar, en ambos casos el porcentaje de superficie del cuadrado límite ocupado en cada paso (sumando todos los pasos anteriores) crece asintóticamente hasta un límite.





**Gráfico 6.3 – % Superficie ocupada. Comparación del % de ocupación de superficie entre ambos métodos**

El método directo ocupa más superficie desde el paso 4 y a partir de ahí ocupa más superficie. Además tiende asintóticamente a ocupar toda la superficie del cuadrado exterior límite. El método limpio tiene un límite de ocupación inferior, que se estima alrededor del 90%.

#### 6.4 FÓRMULAS DE CÁLCULO DEL NÚMERO DE CUADRADOS APORTADOS EN CADA CASO

La diferencia de crecimiento entre ambos métodos se puede deducir de sus secuencias generadoras y es la siguiente.

La fórmula del método limpio es:

$$\begin{aligned}
 LC_n &= 3C_{n-1} - 2C_{n-2} + 2C_{n-4} \\
 &= 3C_{n-1} - 2C_{n-2} + 0C_{n-3} + 2C_{n-4} - 0C_{n-5}
 \end{aligned}$$

La fórmula del método directo es:

$$DC_n = 3C_{n-1} - C_{n-2} - C_{n-3} - C_{n-4} - C_{n-5}$$

Como vemos tienen secuencias de crecimiento del mismo tipo y las podemos restar para obtener una nueva serie con su diferencia de aportación en cada paso:

$$LC_n - DC_n = -C_{n-2} + C_{n-3} + 3C_{n-4} + C_{n-5}$$