El teorema de los triángulos herméticos

Javier Romañach - Mario Toboso

Agosto de 2013

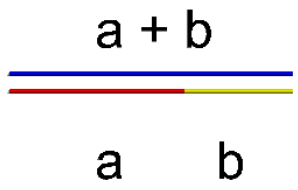
1 La proporción áurea

La proporción áurea fue documentada por primera vez por Euclides (c. 300-265 a. C.), en el libro VI de su obra “Elementos de Geometría”. Euclides lo definió de la siguiente manera: “Se dice que una línea recta está dividida entre el extremo y su proporcional cuando la línea entera es al segmento mayor como el mayor es al menor.”

Euclides demostró también que este número no puede ser descrito como la razón de dos números enteros, es decir, es un número irracional.

Se dice que dos números a y b están en proporción áurea si se cumple

$$\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{\mathrm{a}}=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$$



Si hacemos que el número menor b tenga el valor de la unidad tendremos la ecuación

$$\frac{\mathrm{a}+1}{\mathrm{a}}=\mathrm{a}$$

Multiplicando ambos lados por a obtenemos

$$\mathrm{a}+1=a^2$$

o, lo que es lo mismo, la siguiente ecuación de segundo grado

$$a^2-\mathrm{a}-1=0$$

Que se resuelve con la conocida fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Dado que $\mathrm{b}=\mathrm{a}=1$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Siendo x la relación $\frac{a}{b}$

A esta relación, proporción o número, se le conoce por la letra griega φ (phi), en mayúsculas Φ.

$$\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

2 Teorema de los triángulos herméticos

Dado un triángulo rectángulo, de lados C, c y h

si el cateto mayor es dos veces el cateto menor $\mathrm{C} = 2\mathrm{c}$, la suma de la hipotenusa h más el cateto menor c, dividida por el cateto mayor C, es igual a Φ.

$$\frac{c+h}{\mathrm{C}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

A todos los triángulos de este tipo los denominamos triángulos herméticos.

3 Demostración

Si el triángulo es hermético, es rectángulo y, por el teorema de Pitágoras, sabemos que

$$c^2 + C^2 = \mathrm{h}^2$$

Como es hermético, $\mathrm{C} = 2\mathrm{c}$. Sustituyendo

$$c^2 + 4c^2 = 5c^2 = \mathrm{h}^2$$

Que implica que

$$\mathrm{h} = \sqrt{5}c$$

Por lo tanto

$$\frac{c+h}{\mathrm{C}}=\frac{c+\sqrt{5}c}{2\mathrm{c}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$$

Que es lo que queríamos demostrar.

4 Desarrollo del teorema de los triángulos herméticos

4.1 *Corolario*

La suma de los tres lados o perímetro del triángulo (c + C + h) divida por C es igual a Φ^2.

$$\frac{c+h+C}{\mathrm{C}}=\Phi^2$$

$$c+\mathrm{h}+\mathrm{C}=\mathrm{C}\Phi^2=\mathrm{C}(\Phi+1)$$

El cateto mayor C dividido por el cateto menor más la hipotenusa es igual 1- Φ.

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{c}+\mathrm{h}}=\frac{1}{\Phi}=1-\Phi$$

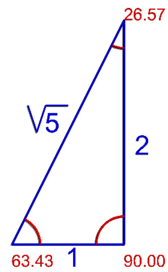
4.2 *Ángulos característicos*

Los ángulos que caracterizan a este tipo de triángulos son:

$\alpha = 63{,}43^0$

$\beta = 26{,}57^0$

$\gamma = 90^0$



4.3 *Desarrollos sobre el Teorema*

Combinando

$$\Phi^2=\frac{c+h+C}{\mathrm{C}}=\frac{(c+h)^2}{\mathrm{C}^2}$$

Que simplificada da la siguiente expresión adicional.

$$\Phi=\frac{\mathrm{c}+\mathrm{h}}{\mathrm{C}}=\frac{c+h+C}{\mathrm{C}+\mathrm{h}}$$

Y podemos decir que el triángulo hermético canónico toma los valores

$$c=1,\qquad \mathrm{C}=2,\qquad \mathrm{h}=\sqrt{5}$$

Y

$$\Phi = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$$

En el triángulo hermético canónico encontramos, por lo tanto, dos expresiones distintas para Φ. La que se deriva de aplicar el Teorema de Pitágoras.

$$\Phi = \frac{\mathrm{c}+\mathrm{h}}{C} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Y la hermética

$$\Phi = \frac{\mathrm{c}+\mathrm{h}+\mathrm{C}}{c+h} = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$$

De las dos expresiones subrayadas del Teorema se deduce que $(\mathrm{c}+\mathrm{h})$ es longitud áurea mayor con relación a C, pero longitud menor con relación a $(\mathrm{c}+\mathrm{h}+\mathrm{C})$. Tenemos, pues, tres elementos significativos en el triángulo hermético, que son los siguientes:

$\mathrm{A} = (\mathrm{c}+\mathrm{H}+\mathrm{C})$

$\mathrm{B} = (\mathrm{c}+\mathrm{H})$

$\mathrm{C} = \mathrm{C}$

Entre los cuales se verifica:

$$\Phi = \frac{B}{C}\,, \qquad \Phi = \frac{A}{B}, \qquad \Phi^2 = \frac{A}{C}$$

Observando, además, que $\mathrm{A} = \mathrm{B}+\mathrm{C}$ se obtienen otras relaciones conocidas:

$$\Phi = \frac{A}{B} = 1 + \frac{C}{B} = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

Y

$$\Phi^2 = \frac{A}{C} = 1 + \frac{B}{C} = 1 + \Phi$$

Y otras más curiosas

$$\frac{\mathrm{c}+\mathrm{h}+\mathrm{C}}{c+h-C} = \Phi^3$$

$$\frac{\mathrm{c}+\mathrm{h}+\mathrm{C}}{C} = \Phi^2$$

$$\frac{\mathrm{c+h+C}}{c+h} = \frac{\mathrm{c+h}}{C} = \Phi^1$$

$$\frac{\mathrm{c+h+C}}{c+h+C} = 1 = \Phi^0$$

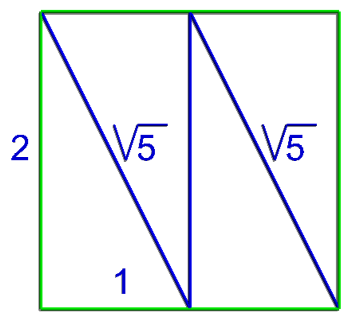
$$\frac{\mathrm{c+h-C}}{C} = \Phi^{-1}$$

$$\frac{\mathrm{c+h-C}}{c+h} = \Phi^{-2}$$

$$\frac{\mathrm{c+h-C}}{c+h+C} = \Phi^{-3}$$

4.4 El cuadrado y los triángulos herméticos

Al igual que el triángulo áureo y su gnomon son los únicos triángulos áureos con los que se puede rellenar un pentágono, los triángulos herméticos son los únicos triángulos áureos capaces de rellenar un cuadrado.



Por lo tanto podemos decir que un cuadrado también encierra la proporción áurea de manera hermética.

5 Bibliografía

DOROTA, J (2013) "Unavoidable Golden ratio". http://arxiv.org/pdf/1208.2269v1.pdf

GHYKA, M. C. (1927) "Esthétique des proportions dans la nature en dans les arts"

GHYKA, M. C. (1977) "The geometry of art and life". Dover Publications. Inc. New York

HERTZ-FISCHLER, R (1987) “The mathematical history of the golden number”. Dover Publications Inc. 1998.

LIVIO, M. (2002) “La proporción áurea”. Editorial Ariel, Barcelona, 2008.

HUNTLEY,H. E.(1970) *The Divine Proportion*, Dover, 1970

HOFSTETTER, K. (2002) A Simple Construction of the Golden Section, *Forum Geometricorum*, v 2 (2002)

5.1 *Webs:*

Golden Ratio in Geometry:

http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio.shtml#Huntley

Two-dimensional Geometry and the Golden section or Fascinating Flat Facts about Phi

http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/phi2DGeomTrig.html#cons3